

### **Kurzbeschreibung**

In dieser Unterrichtsstunde erforschen die Schüler/ innen ein einfaches Computerprogramm. Die Aufgabe eröffnet den Schülern die Möglichkeit, *ihre eigenen* Fragen zu einem bestimmten Phänomen zu formulieren und das Problem selbst wissenschaftlich und systematisch zu bearbeiten. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht weniger in ihrem Inhalt, sondern vielmehr darin, dass sie den Lernenden die Möglichkeit zum Experimentieren, Generalisieren und Prüfen gibt.

### **Grundprinzip**

Die Aufgabe bietet den Lehrenden die Möglichkeit, von der traditionellen Rolle des Inhalte erklärenden Lehrers abzurücken und stattdessen die Lernenden zu ermutigen, ihren Lernprozess eigeninitiativ zu beaufsichtigen. Die neue Rolle des Lehrers/ der Lehrerin besteht nicht nur darin, hinten zu stehen und zu beobachten, sondern vor allem darin, die Schüler/ innen dazu aufzufordern, zu beschreiben, zu erklären, zu generalisieren, zu prüfen und so präzise und überzeugend wie möglich zu formulieren.

### **Fachgebiet**

Die Aufgabe stammt aus dem Bereich der Mathematik. Sie erfordert aber keine fortgeschrittenen mathematischen Kenntnisse, sodass sie sowohl mit Grund- als auch mit Sekundarschüler(n)/ innen durchgeführt werden kann.

### **Konzeptionelle Ziele**

Da die Schüler/ innen ihre eigenen Fragen festlegen und jeweils ihr individuelles Wissen heranziehen, können die konzeptionellen Ziele variieren. Die Aufgabe ist von geometrischer Art und die Lernenden können sich sowohl auf ihre symmetrischen Kenntnisse (Spiegelung+Drehung) stützen, als auch auf algebraisches Wissen, wenn sie Verallgemeinerungen machen und prüfen.

### **Altersgruppe**

Die Aufgabe ist angemessen für Schüler/ innen der Klasse 5-10.

### **Integrierte Prozesse des Forschenden Lernens**

In dieser Aufgabe sollen die Schüler/ innen:

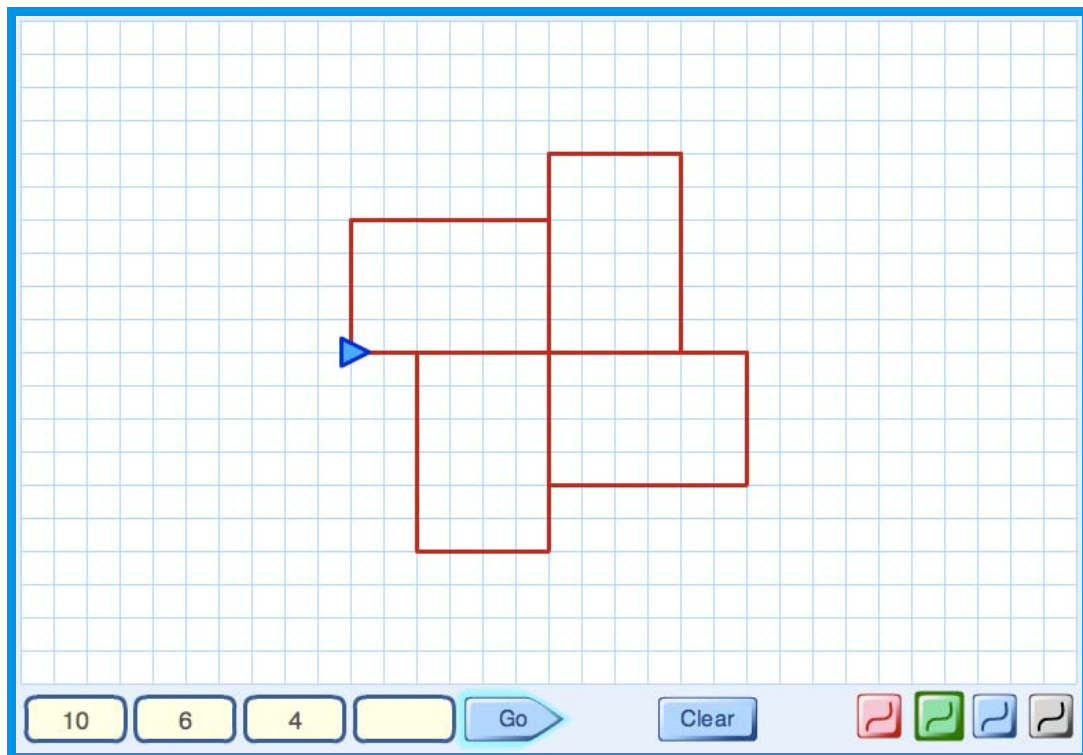
- Eine Mikro- Computerwelt beobachten, experimentieren, indem sie Variablen verändern, Fragen und Hypothesen formulieren.
- Eine systematische Herangehensweise an ihre eigenen Fragen planen. Sie wählen Wege aus, wie sie die gefundenen Daten sinnvoll darstellen können, z. B. mithilfe einer Tabelle. Sie ziehen ihr mathematisches Wissen heran, um ihre Erkenntnisse zu beschreiben (z. B. Symmetrie).
- Ihre Untersuchungen durchführen, strukturiert Daten und weitere Informationen sammeln, dokumentieren und analysieren.
- Verallgemeinerungen machen, erklären und prüfen (z. B. das Eingeben einer Sequenz von 3 Zahlen führt immer zu einer geschlossenen Form).
- Ihre Ergebnisse kommunizieren und reflektieren, was sie gelernt haben.



## **Links und Verweise**

Die Aufgabe und die Software, die damit einhergeht, wurden von Malcolm Swan und Daniel Pead entworfen und bilden einen Teil der Bowland- Ressourcen, die in England für die mathematische Weiterbildung entwickelt und an Schulen in ganz Großbritannien verbreitet wurden. Sie wurden hier verwendet mit der freundlichen Genehmigung der Bowland Charity- Stiftung.

## Spirolaterals



Gib ein paar Zahlen in die Spirolateral- Maschine ein.  
Klicke auf den Button „Go“ (Los geht`s) und schau zu, was passiert.

- Wie steuern die Zahlen, was auf dem Bildschirm gezeichnet wird?
- Liste einige Forscherfragen auf. Diese könnten so beginnen:  
"Wie können wir den Computer dazu bringen, ... zu zeichnen?"  
"Was passiert, wenn wir .....?"

Versuche, deine eigenen Fragen zu beantworten!

- Stelle Vermutungen auf. Diese könnten so beginnen:  
" Wenn du drei Zahlen verwendest, dann ..."  
" Wenn du eine Zahl wiederholst, dann ..."  
" Wenn du die Reihenfolge der Zahlen veränderst, dann ..."

Kannst du deine Vermutungen *überprüfen*?

## Ein möglicher Unterrichtsplan

### Dauer der Aufgabe

Für diese Aufgabe sollten ein bis zwei Stunden eingeplant werden. Der Zeitplan unten gilt nur ungefähr und wird von Klasse zu Klasse variieren.

### Vorbereitung und benötigte Materialien

Jeweils zwei Schüler/ innen benötigen:

- Zugang zu einem Computer, der die Software *Spirolaterals* abspielt.
- 1 cm- kariertes Papier zum Festhalten ihrer Ideen.
- Bleistifte und Lineale.

Außerdem ist es hilfreich, mit einem Beamer zu arbeiten, um die Aufgabe der ganzen Klasse vorzustellen und die Gelegenheit für eine Diskussion über das Problem im Plenum leiten zu können.

### Einführung der Aufgabe in der Klasse

**5 Minuten**

Den Schüler(n)/ innen je ein Handout mit dem Problem geben und die Absicht der Stunde erklären:

*Das Ziel der heutigen Stunde ist es, ein einfaches Computerprogramm zu erforschen.  
Ihr sollt versuchen, diese Fragen zu beantworten:*

*Was macht das Programm?  
Welche spannenden Fragestellungen wirft es auf?  
Kannst du irgendwelche davon lösen?  
Hast du Vermutungen und kannst diese prüfen?*

Den Schüler(n)/ innen erklären, was von ihnen beim Arbeiten erwartet wird:

*Ich möchte, dass ihr zu zweit arbeitet und herausfindet, wie die Software funktioniert.  
Versucht festzuhalten, was passiert, wenn ihr verschiedene Zahlen eingibt/ verschiedene Tasten drückt.  
Beginnt schon über mögliche Forschungsfragen nachzudenken, während ihr das tut.  
Ihr könntet z. B. Fragestellungen aufschreiben, die so beginnen:  
"Wie können wir den Computer dazu bringen, ....zu zeichnen?"  
"Was passiert, wenn wir .....?"  
In fünf Minuten werde ich euch darum bitten, eure Ideen mit dem Rest der Klasse zu teilen.*

Den Schüler(n)/ innen kariertes Papier, Bleistifte und Lineale austeilen.

### Schüler/ innen erforschen die Mikrowelt und entwickeln Fragestellungen **15 Minuten**

Den Schüler(n)/ innen 5 Minuten geben, zu erforschen, was passiert, wenn sie Zahlen in die Software eingeben.

Herumgehen, die Schüler/ innen ermutigen, präzise zu beschreiben, was passiert.

*Erklär mir, woher der Computer weiß, was er zeichnen soll, wenn du diese Zahlen eingibst.*

*Wenn ich diese drei Zahlen eingebe (1, 2, 3), was malt er dann, wenn ich „Go“ drücke?  
Was macht der Computer mit diesen drei Zahlen?*

Die Schüler/ innen ermutigen, so klar und vollständig wie möglich zu beschreiben, was passiert.

Sie könnten z. B. sagen:

*Du startest nach rechts.*

*Du gehst 1 Schritt vorwärts, dann drehst du dich um  $90^\circ$  nach links.*

*Du gehst 2 Schritte vorwärts, dann drehst du dich um  $90^\circ$  nach links.*

*Du gehst 3 Schritte vorwärts, dann drehst du dich um  $90^\circ$  nach links.*

*Du gehst 1 Schritt vorwärts, dann drehst du dich um  $90^\circ$  nach links.*

*... und so weiter, 1,2,3 wiederholend, bis du wieder am Ausgangspunkt ankommst.*

Diese Vorgehensweise mit anderen Zahlen wiederholen, bis die Schüler/ innen zu wissen scheinen, wie das Programm die Formen zeichnet.

Als nächstes mögliche Forscherfragen diskutieren und einige an der Tafel notieren.

Die Schüler/ innen könnten z. B. folgende Vorschläge äußern:

*Was passiert, wenn wir nur eine Zahl eingeben und "Go" drücken.*

*2 Zahlen? 3 Zahlen? 4 Zahlen?*

*Können wir die Art der Form, die wir herausbekommen, vorhersagen?*

*Was passiert, wenn wir die Reihenfolge der Zahlen verändern?*

*Also wie unterscheidet sich (1,2,3) von (1,3,2)?*

*Gehen die Formen immer wieder in ihre Ausgangsposition zurück?*

*Wann tun sie das? Wann tun sie es nicht?*

*Wie können wir das anhand der Zahlen vorhersagen?*

*Wann sind die Formen rotationssymmetrisch?*

*Können wir das anhand der Zahlen vorhersagen?*

*Wann sind die Formen achsensymmetrisch?*

*Können wir das anhand der Zahlen vorhersagen?*

*Was passiert, wenn wir dieselbe Zahl mehr als einmal eingeben?*

*Was passiert mit drei Zahlen, z. B. (1,1,2); (3,2,3)?*

*Was passiert mit 4 Zahlen, z. B. (1,3,4,4)...?*

Die Schüler/ innen auffordern, eine bestimmte Fragestellung auszuwählen, an der sie arbeiten wollen. Sie ermutigen, bei der Beantwortung der Frage systematisch vorzugehen. Besprechen, wie sie ihre Arbeit dokumentieren sollen:

*Wenn ihr meint, dass ihr Hypothesen oder Vermutungen habt, solltet ihr in der Lage sein, mir Belege dafür zu liefern. Versucht also, während der Arbeit sorgfältig zu dokumentieren, was ihr ausprobiert. Ihr könnt auch einige Diagramme aus dem Programm kopieren und in ein Textverarbeitungsprogramm einfügen.*

## Schüler/ innen bearbeiten ihre Fragestellung

20 Minuten

Die Schüler/ innen bei der Arbeit zum strategischen und analytischen Denken anregen:

*Kannst du mir deine Fragestellung präzise darlegen?  
Welche Beispiele hast du bis jetzt durchgespielt?  
Was hältst du schon sicher fest? Was änderst du noch?*

*Was hast du schon herausgefunden?  
Kannst du hier irgendwelche Muster oder Beziehungen feststellen?  
Kannst du erklären, warum deine Idee zu funktionieren scheint?*

*Wie dokumentierst du deine Arbeit?  
Kannst du eine hilfreiche Darstellungsart verwenden?  
Warum musst du das machen?*

## Schüler/ innen erstatten Bericht und tauschen ihre Erkenntnisse aus

20 Minuten

Wenn die meisten Schüler/ innen bedeutend mit ihrem Problem vorangekommen sind, werden einige Paare nach vorne gebeten, um dem Rest der Klasse ihre Ideen mitzuteilen. Sie können hierbei einige Muster direkt auf der Software zeigen, die an die Wand projiziert wird. Es ist kein Problem, wenn manche noch zu keinem Ergebnis gekommen sind. Sie können trotzdem ihre Ansätze und Ideen vorstellen.

*Lasst uns nun die Arbeit unterbrechen, ein paar verschiedene Ansätze besprechen und betrachten, was wir entdeckt haben.*

*Erklär uns:*

- *die Fragestellung, die du löst;*
- *wie du dein Vorgehen strukturiert hast;*
- *jegliche Schlussfolgerungen, die du bis jetzt schon machen konntest;*
- *jegliche Erklärungen, die du für deine Antworten hast.*

*Während einige Schüler/ innen ihre Ideen vorstellen, sollen die Anderen Vorschläge, weitere Beispiele oder Gegenbeispiele sowie Ideen einbringen, was als nächstes zu tun ist.*

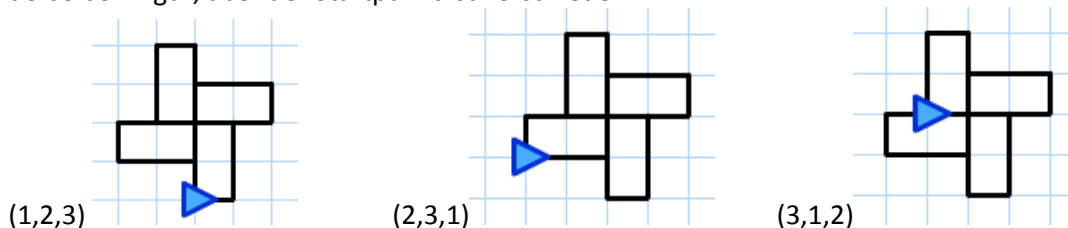
Als Hausaufgabe sollten die Schüler/ innen dazu aufgefordert werden, einen Bericht über ihre Entdeckungen zu schreiben.

## Entdeckungen, die die Schüler/ innen möglicherweise machen

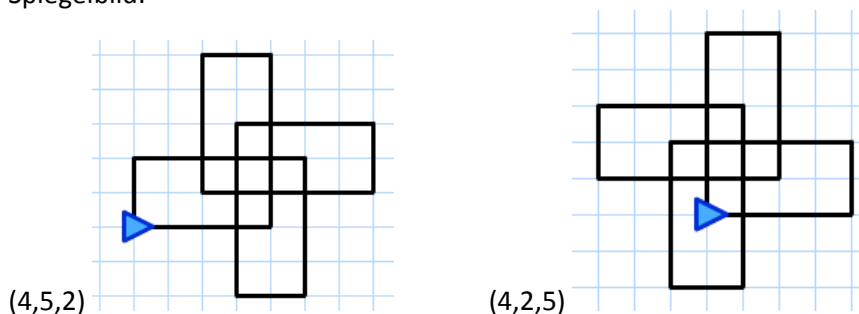
Dies ist ein Beispiel für ein Computerprogramm, das man in nur einigen Sekunden zu bedienen versteht und das dennoch viele mathematische Möglichkeiten bietet. Die Computerversion ermöglicht es, die Beziehung zwischen den eingegebenen Zahlen und den erhaltenen Diagrammen zu erforschen.

Die Schüler/ innen können viele Aspekte durch Ausprobieren entdecken. Zu erklären und zu prüfen, *warum* diese Muster entstehen, ist natürlich die wesentliche und erweiterte Herausforderung:

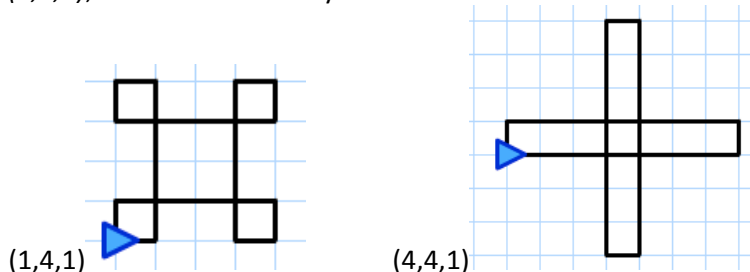
- Wenn eine einzige Zahl  $a$  eingegeben wird, erhalten wir ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ .
- Wenn zwei Zahlen  $a, b$  eingegeben werden, erhalten wir ein Rechteck mit den Seiten  $a, b$ .
- Jede zyklische Veränderung der Reihenfolge dreier Zahlen:  $(a,b,c)$ ;  $(b,c,a)$ ;  $(c,a,b)$  führt zu derselben Figur, aber der Startpunkt ist verschieden:



- Die Veränderung der zyklischen Ordnung dreier Zahlen von  $(a,b,c)$  nach  $(a,c,b)$  führt zum Spiegelbild:



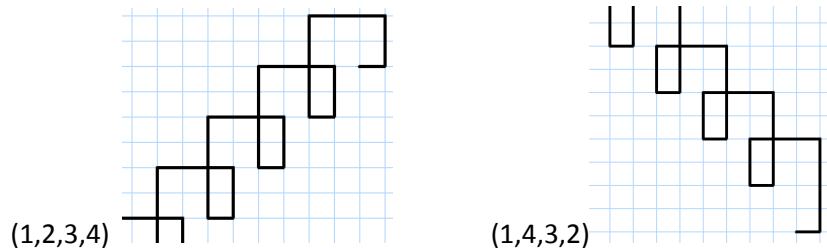
- Aus drei Zahlen, von denen eine oder mehrere doppelt vorkommen, z. B.  $(a,b,b)$  oder  $(a,b,a)$ , entstehen achsensymmetrische Muster:



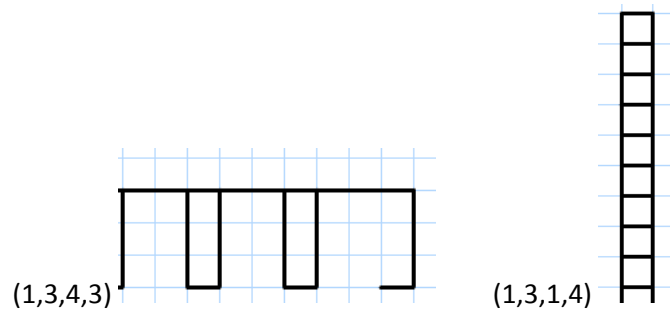
- Muster mit 4 verschiedenen Zahlen  $(a,b,c,d)$  tendieren dazu, „aus dem Bildschirm zu verschwinden“...
  - wenn  $a > c$ , dann geht es nach rechts;
  - wenn  $a < c$ , dann geht es nach links;
  - wenn  $b > d$ , dann geht es nach oben;

- wenn  $b < d$ , dann geht es nach unten;
- wenn ein Zahlenpaar gleich ist,  $a=c$  oder  $b=d$ , dann ist der Weg senkrecht oder entsprechend waagrecht.
- wenn  $a=c$  und  $b=d$ , dann erhalten wir ein Rechteck.

D. h.,  $(1,2,3,4)$  geht nach links und unten, während  $(1,4,3,2)$  nach links und oben geht;



$(1,3,4,3)$  geht waagrecht und nach links;  $(1,3,1,4)$  geht senkrecht und nach unten;



$(2,3,2,3)$  ist ein Rechteck:

