

## LEITFADEN FÜR DIE LEHRERFORTBILDUNG MODUL 1: FORSCHUNGSFRAGEN ENTWICKELN

Wie können SchülerInnen dazu angeregt werden ihre eigenen Fragenstellungen  
zu entwickeln und diese weiterzuverfolgen?

### Einleitung:

Eines der fundamentalsten Ziele des forschenden und entdeckenden Lernens ist es, die Neugier der SchülerInnen für ihre Umwelt und die Ideen, von denen sie umgeben sind, zu wecken.

Wissenschaftler und Mathematiker beobachten Phänomene und stellen Fragen. Wenn diese Fragen zu komplex sind, werden diese vereinfacht oder die Situation abgeändert. Zum Beantworten der Fragen werden z. B. Experimente durchgeführt und Daten gesammelt. Die experimentellen Ergebnisse werden interpretiert und überprüft. Am Ende werden die Resultate auf Konferenzen präsentiert und in Fachzeitschriften veröffentlicht.

Dieser Prozess fehlt oftmals im Schulunterricht. Da läuft es meistens so ab, dass der Lehrer/die LehrerIn den SchülerInnen vorher sagt, was beobachtet werden muss, er gibt die Fragen vor, demonstriert die Verfahren, die angewandt werden müssen und überprüft die Ergebnisse. Die SchülerInnen werden lediglich darum gebeten, diese Anweisungen zu befolgen.

In diesem Modul werden Sie als LehrerIn dazu angeregt die SchülerInnen darin zu fördern Fragen über Phänomenen zu stellen und diese Fragen wissenschaftlich zu untersuchen. Als LehrerIn sollen Sie über einen Perspektivwechsel nachdenken, der für die SchülerInnen erforderlich ist, um einen solchen Prozess alleine zu durchlaufen. Alle der hier vorgestellten Aktivitäten können Sie direkt im Klassenzimmer ausprobieren. Die jeweiligen Handouts finden Sie in voller Größe in einer separaten Datei.

### Inhaltsverzeichnis:

Aktivität A:	Fragen über Phänomene stellen .....	2
Aktivität B:	Fragen zu Fotografien stellen .....	4
Aktivität C:	Eine Stunde beobachten und analysieren .....	6
Aktivität D:	Eine Unterrichtsstunde planen, durchführen und die Ergebnisse reflektieren .....	7
	Empfohlene Literaturhinweise .....	10

Anmerkung: ©Centre for Research in Mathematics Education, University of Nottingham, England  
Dieses Material wurde für PRIMAS angepasst: Swan, M; Pead, D (2008). *Professional development resources*.  
Bowland Maths Key Stage 3, Bowland Trust/ Department for Children, Schools and Families. In England online  
verfügbar unter: <http://www.bowlandmaths.org.uk> Veröffentlichung erlaubt durch Bowland Trust.

## AKTIVITÄT A: FRAGEN ÜBER PHÄNOMENE STELLEN

### **Benötigte Zeit: 30 Minuten.**

Bei dieser Aktivität kann man der Gruppe die Auswahl zwischen zwei Einstiegsmöglichkeiten anbieten:

- Die eine besteht darin einen Pappbecher zu rollen
- Die andere beinhaltet die Computersoftware: *Spirolaterals*

Für die erste Aktivität braucht jede Gruppe mindestens drei verschiedene Pappbecher.

Für die zweite Aktivität steht ein Computerprogramm (Flash) zur Verfügung.

Aufgabe für die Situation, die Sie untersuchen möchten:

- Stellen Sie eine Liste mit Dingen auf, die Ihnen an der Situation auffallen.
- Welche Fragen fallen Ihnen ein?
- Sie könnten mit Fragen beginnen, die so anfangen:
  - Was würde geschehen, wenn...?
  - Was kann ich verändern...?
  - Welche Wirkung wird jede Variable auf ... haben?
- Stellen Sie sich nun eine Aufgabe und versuchen Sie diese zu lösen.

Wenn Sie Ihr Experiment durchgeführt haben, versuchen Sie Ihre Ergebnisse zu analysieren.

- Welche Daten haben Sie gesammelt?
- Wie haben Sie Ihre Daten organisiert?
- Wie können Sie Ihre Ergebnisse erklären?

Nachdem die Gruppen eine der beiden Situationen untersucht haben, bitten Sie sie darum den Prozess, den sie durchlaufen haben, zu reflektieren. Das "Handout 2" wird ihnen dabei helfen. Haben sie folgendes getan:

#### **Probleme ausformulieren?**

- Variablen auflisten?
- Vereinfachen und darstellen?

#### **Bearbeiten und lösen?**

- visualisieren; Diagramme erstellen?
- Variablen systematisch verändern?
- Nach Mustern und Beziehungen suchen?
- Berechnungen vornehmen und Aufzeichnungen machen?
- Vermutungen und Verallgemeinerungen aufstellen?
- Logisch und deduktiv begründen?

#### **Interpretieren und evaluieren?**

- Schlussfolgerungen, Argumente und Verallgemeinerungen ableiten
- Richtigkeit und Angemessenheit berücksichtigen
- Auf die Originalsituation zurückbeziehen

#### **Besprechen und reflektieren?**

- Ergebnisse ausgiebig besprechen und diskutieren
- Alternativlösungen erwägen
- Eleganz, Effizienz und Äquivalenz berücksichtigen
- Nach Zusammenhängen zu anderen Problemen suchen

## Handout Nr. 1 zur Aktivität A: Zu erforschende Phänomene

### Die rollenden Becher

Schaut euch diese zwei Becher an.

Stellt euch vor, dass sie über den Fußboden rollen.

- Sammelt einige Fragen, die euch dabei in den Sinn kommen.  
„Werden die Becher in eine ... rollen?“  
„Wie kann ich ... vorhersehen?“  
„Was würde passieren, wenn ...?“
- Stellt einige Vermutungen auf. Diese können in etwa so beginnen:  
„Wenn man diese Form des Bechers nimmt, dann passiert ...“  
„Wenn man den Becher zu stark rollt, dann ...“
- Nun führt ein Experiment durch und sieht, was dabei herauskommt.  
Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?

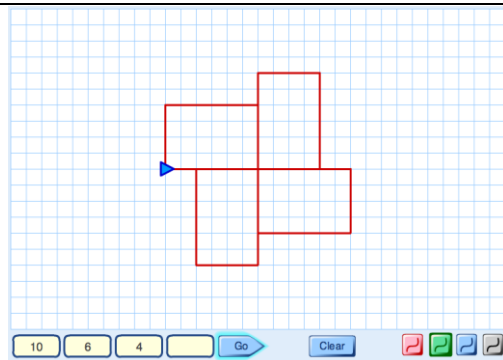


### Computerprogramm Spirolaterals

Gebe einige Zahlen in die *Spirolaterals*-Maschine ein.

Drücke "Go" und siehe, was geschieht.

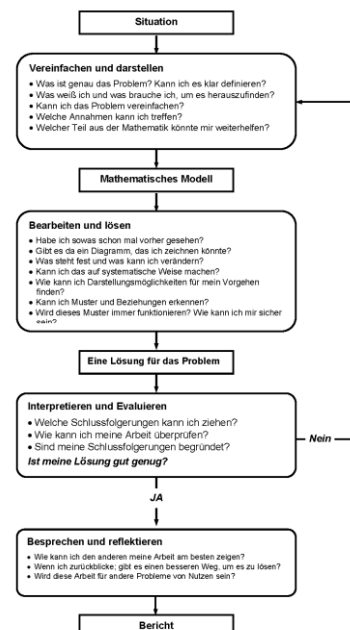
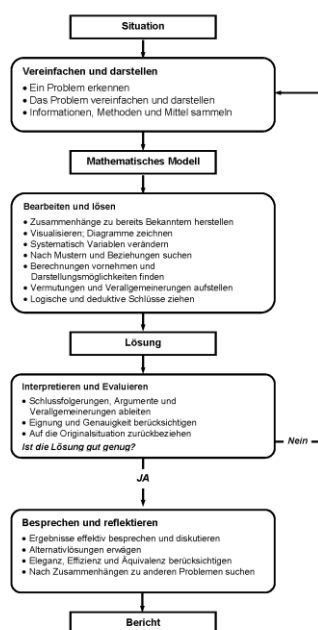
- Wie kontrollieren die Nummern das, was auf dem Bildschirm dargestellt ist?
- Sammle einige Fragen, die du klären möchtest. Diese können etwa so beginnen:  
"Wie können wir den PC dazu bringen ... zu malen?"  
"Was wird geschehen, wenn wir ...?"  
Probiere es aus und beantworte deine eigenen Fragen!
- Stelle einige Hypothesen auf. Diese können in etwa so beginnen:  
"Wenn man drei Zahlen verwendet, dann ..."  
"Wenn man eine Zahl wiederholt, dann ..."  
"Wenn man die Reihenfolge der Zahlen ändert, dann ..."  
Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?



## Handout Nr. 2 zur Aktivität A: Der Modellierungsprozess

### Handout Nr. 2 Der Modellierungsprozess

Die schmalen Kästchen repräsentieren Stadien des Modellierungsprozesses.  
Die breiten Kästchen beschreiben die Tätigkeiten, die sich zu den jeweiligen Stadien gehören.



## AKTIVITÄT B: FRAGEN ZU FOTOGRAFIEN STELLEN

**Benötigte Zeit: 20 Minuten.**

Es ist nicht immer einfach für die SchülerInnen eine Verbindung zwischen ihrer realen Welt und dem Unterricht zu sehen. Aus diesem Grund wenden sie das, was sie in der Schule gelernt haben nicht an; auch wenn wissenschaftliches Denken ihnen dabei helfen würde die Welt besser zu verstehen – und besser Entscheidungen zu treffen.

Schauen Sie sich die Auswahl an Fotos z. B. auf Handout 3 an.

- Erstellen Sie eine Liste mit Dingen, die Ihnen an der Situation auffallen.
- Welche Fragen fallen Ihnen ein?
- Man könnte mit Fragen beginnen, die so anfangen:
  - Wie viele ...?
  - Was würde geschehen, wenn...?
- Stellen Sie sich nun eine Aufgabe und versuchen Sie diese zu lösen.

Nachdem die Gruppen beide Situationen untersucht haben, bitten Sie sie darum einige ihrer Fragen, die sie notiert haben, mit allen zu teilen. Folgendes könnte das Resultat einer Gruppe sein:

Dominos:

- Welcher Dominostein fehlt?
- Wie kann man die Dominosteine systematisch anordnen?
- Kann man mit dem kompletten Set eine Kette oder einen Ring erstellen?
- Wie viele Teile sind in einem kompletten Set? Wie kann man sie auf schnellstem Wege zählen?
- Wie viele Dominosteine sind in einem kompletten Set von  $(1,1)$  bis  $(n,n)$ ?

Kalender:

- Wie sind die Zahlen auf den Würfeln angeordnet?
- Kann man ein Würfelnetz erstellen und diese bauen?
- Welche unmöglichen Daten können aus diesen Würfeln erstellt werden?

Stapel Fässer

- Wie viele Fässer sind auf dem Stapel?
- Wenn man einen höheren Stapel aufbaut 4, 5, ... Fässer hoch, wie viele Fässer braucht man dann?
- Wie kann man diese Fässer sonst stapeln? Welche anderen Pyramidenformen sind möglich?

Ein Bürgersteig in Deutschland

- Sind alle Pflastersteine identisch? Welche Form haben sie? Kann man irgendwelche Winkel herausfinden?
- Kann man einen der Pflastersteine genau nachzeichnen?
- Welche anderen Formen können die Pflastersteine haben?

Dreirad mit viereckigen Rädern

- Fährt das Dreirad reibungslos? Kann man ein einfaches Modell erstellen?
- Wie hoch ist jede "Bodenwelle" auf der Bahn?
- Kann man die Form der „unebenen Straße" genau nachzeichnen?
- Was würde geschehen, wenn man dreieckige oder sechseckige Räder hätte?

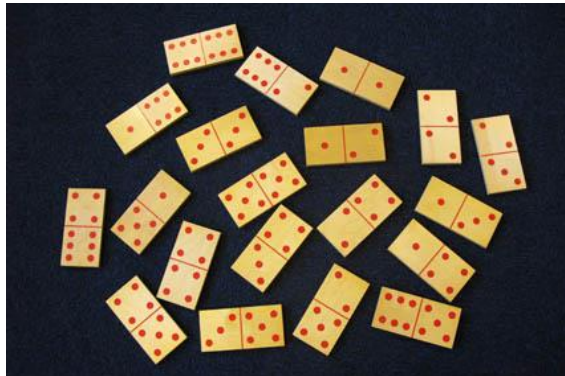
Russische Puppen

- Liegen die Kopfen auf einer Geraden?
- Wenn du ein paar größere Puppen in dieser Reihe herstellen solltest – wie groß müssten sie sein?

Bitten Sie die Gruppe eigene Fotografien in die nächste Sitzung mitzubringen und Fragestellungen dazu zu entwickeln. Fragen erstellen ist eine Aktivität, die für forschendes und entdeckendes Lernen von Bedeutung ist. In einem späteren Modul geht es darum, wie SchülerInnen dazu angeregt werden können ihre eigenen Fragestellungen zu entwickeln.

Handout Nr. 3 zur Aktivität B:  
Zu erforschende Fotografien

*Dominos*



*Kalender*



*Fässer*



*Bürgersteig in Deutschland*



*Dreirad mit viereckigen Rädern*



*Russische Puppen*



## AKTIVITÄT C: EINE STUNDE BEOBACHTEN UND ANALYSIEREN

**Benötigte Zeit: 30 Minuten.**

Es stehen zwei Videos von Unterrichtsstunden zur Verfügung. Ein Video beschäftigt sich mit dem Programm Spirolaterals von Aktivität A. Das andere Video beschäftigt sich mit den Fotos des Baus einer Schule, was im Folgenden dargestellt wird. Jedes Video dauert ungefähr 10 Minuten. Es reicht vollkommen *ein* Video zu betrachten.

Stellen Sie sich während des Betrachtens des Videos folgende Fragen:

- Welche Prozesse lassen sich in der Arbeit der SchülerInnen erkennen?
- Können Sie erkennen, dass die SchülerInnen:
  - Die Situation vereinfachen und darstellen?
    - Welche Fragen haben sie formuliert?
    - Welche Vereinfachungen und Darstellungsmöglichkeiten haben sie gefunden?
    - Welche Informationen, Methoden und Mittel haben sie ausgewählt?
  - Innerhalb des Modells, das sie erstellt haben, das Problem bearbeiten und lösen?
    - Welche Variablen haben sie berücksichtigt?
    - Welche Informationen haben sie gesammelt oder geschätzt?
    - Welche Beziehungen haben sie ausformuliert?
    - Welche Berechnungen haben sie angestellt?
  - Die Ergebnisse interpretieren und evaluieren?
    - Was haben sie über die reelle Situation erfahren?
    - Waren ihre Ergebnisse plausibel?
  - Ihre Ergebnisse besprechen und reflektieren?
    - Wie haben sie ihre Auswertungen erklärt?
    - Welche Verbindungen haben sie zu anderen Fragestellungen erkannt?

## Handout Nr. 4 zu Aktivität C: Eine Schule mit Flaschen bauen (in Honduras)

### Handout Nr. 4 Eine Schule aus Flaschen bauen (in Honduras)

Schau dir die Bilder an und:

- Erstelle eine Liste mit Dingen, die dir auffallen.
- Schreibe einige mathematische Probleme auf, die dir in den Sinn kommen.
- Nun versuche ein Problem zu lösen!

Zunächst sammeln wir alte Plastikflaschen...



und füllen sie mit Sand auf.



und erstellen ein Fundament mit Steinen...



und fangen an zu bauen...



und bauen...



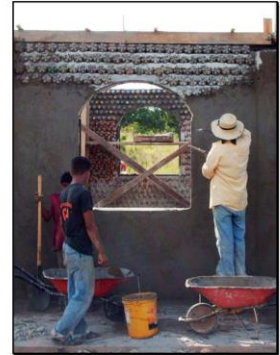
und bauen...



bauen Fenster ein...



und verputzen die Wände.



Das Gebäude steht in Honduras und ist jetzt ein Zentrum für ein Sekundarschulprogramm, dessen Ziel es ist, junge Leute auszubilden und zu motivieren ihren Gemeinden zu helfen und die Armut zu senken. Ein besonderer Schwerpunkt des Programms ist es, SchülerInnen bei der Entwicklung ihrer Problemlösefähigkeiten zu unterstützen.

Bilder mit freundlicher Genehmigung von:  
Bayán Asociación de Desarrollo Socio-Económico Indígena, La Ceiba, Honduras.

## Handout Nr. 5 zur Aktivität C: Eine Schule mit Flaschen bauen: Der Modellierungsprozess

### Handout Nr. 5 Eine Schule mit Flaschen bauen: Der Modellierungsprozess

Im Folgenden erläutern wir den Modellierungsprozess; bezogen auf die Aufgabe „Eine Schule mit Flaschen bauen“.

#### (i) Vereinfachen und darstellen

Zunächst ermitteln wir einige Problemstellungen, die als Fragen formuliert werden können:

- Wie viele Flaschen benötige ich für ein solches Gebäude?
- Wie groß ist das Gebäude, wie groß ist ein Mensch?
- Wie passen die Flaschen zusammen?
- Wie viel Sand brauchen wir, um die Flaschen zu füllen?
- Was ist mit dem Mörtel dazwischen?
- Wie funktioniert das mit den Ecken?
- Was ist mit Türen und Fenstern?
- Was ist mit dem Dach?

Wir werden uns (für den Anfang) auf einen praktischen Ansatz zur Beantwortung der folgenden Frage konzentrieren: **Wie viele Flaschen benötige ich für ein solches Gebäude?**

Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir zunächst einmal an, dass das Haus 4 Wände hat (wie die Winkel im Bild oben nahelegen), alle von derselben Größe, und dass es keine Fenster gibt. Wir können die Berechnungen noch zusätzlich vereinfachen, wenn wir annehmen, dass die Anzahl der Flaschen, die benötigt werden, ungefähr so viele wären, wie wenn sie im Rechteck gestapelt wären, d. h. eher so... als so...



Wir werden diese Vermutung im zweiten Durchgang durch den Modellierungskreislauf abändern.

#### (ii) Bearbeiten und lösen

Zähle die Flaschen, die in einer Reihe stehen.

Schätze, wie viele Reihen es gibt. (Man kann sie nicht alle sehen)

Das Produkt daraus ist ungefähr die Anzahl an Flaschen.

Addiere auf für 4 Wände – angenommen die Wände sind gleichgroß.

Also: Es sind 25 Flaschen in einer Reihe.

Wir können nur die oberen 7 Reihen deutlich erkennen und zählen; diese entsprechen in etwa 1/3 Höhe.

Also schätzen wir, dass ungefähr  $3 \times 7 = 20$  Reihen sind.

Also besteht die Wand aus etwa  $25 \times 20 = 500$  Flaschen.

Angenommen die 4 Wände sind gleichgroß, dann wären es  $4 \times 500 = 2000$  Flaschen.

#### (iii) Interpretieren und Evaluieren

Dieses Resultat ist gut genug, um den Modellierungsprozess zu veranschaulichen (und einfach davon zu berichten) aber (und das ist der Grund, warum das ein Modellierungskreislauf ist) wenn wir das Problem wirklich verstehen wollen, **müssen wir die Lösung verbessern, indem wir einen Schritt zurückgehen und die anderen Fragen, die oben aufgelistet sind, beantworten.**

Mögliche Verfeinerungen beinhalten zum Beispiel:

## AKTIVITÄT D: EINE UNTERRICHTSSTUNDE PLANEN, DURCHFÜHREN UND DIE ERGEBNISSE REFLEKTIEREN

### Benötigte Zeit:

- **15 Minuten für eine Diskussion vor der Unterrichtsstunde**
- **1 Stunde für die Unterrichtsstunde**
- **15 Minuten nach der Unterrichtsstunde**

Ihre Aufgabe ist es nun eine Unterrichtsstunde zu planen, die eine der Aktivitäten aus C, Bau einer Schule oder das Programm Spirolaterals, zum Thema hat.

Besprechen Sie sich, wie Sie:

- die SchülerInnen in die Situation einführen werden;
- das Konzept des Modellierungsprozesses vorstellen;
- das Klassenzimmer und die benötigten Mittel organisieren;
- die Frage "Warum machen wir das in Mathematik?" beantworten;
- die Unterrichtsstunde so beenden, dass die SchülerInnen ein besseres Verständnis für das Wesen der wissenschaftlichen Prozesse erwerben.

Vergleichen Sie anschließend Ihren Unterrichtsentwurf mit dem Unterrichtsentwurf auf dem Handout 6. Besprechen Sie die Unterschiede.

Es ist sinnvoll den Unterricht mit einem Beamer zu gestalten. Darüber hinaus ist es hilfreich mit folgenden Mitteln ausgestattet zu sein, um möglichen Problemen, die entstehen könnten, entgegenzuwirken:

- Einige 1-Liter Plastikflaschen,
- Lineale oder Maßbänder,
- Spielchips oder Münzen (um herauszufinden wie die Flaschen zusammengepackt werden können),
- Isometrisches Papier (um das Zeichnen und Zählen zu erleichtern).
- Einige Kopien des Handouts 4 für die SchülerInnen.

Nehmen Sie sich etwas Zeit nachdem Sie den Unterricht durchgeführt haben, um das, was geschehen ist, und die Prozesse, die Sie beobachtet haben, zu reflektieren.

- Welche Fragen wurden entwickelt?
- Haben die SchülerInnen eine Reihe von Darstellungsmöglichkeiten verwendet?
- Welche Beziehungen haben sie in der Situation entdeckt?
- Welche Berechnungen haben sie angestellt? Konnten sie die Bedeutung derselben interpretieren?
- Waren sie in der Lage ihre Ergebnisse effektiv zu vermitteln?
- Hatten Ihre SchülerInnen das Gefühl, dass dieser Unterricht anders als der übliche Unterricht war?
- Beginnen sie nun die Techniken, die sie in der Schule gelernt haben, zu schätzen, weil sie sehen, dass sie in ungewohnten Situationen einsetzbar sind?



## Handout Nr. 6 zur Aktivität D: Ein möglicher Unterrichtsverlauf

### Handout Nr. 6 Ein möglicher Unterrichtsverlauf

Hier folgen einige Vorschläge, wie die Fotos im Unterricht eingesetzt werden können. Ziel ist, den SchülerInnen den Modellierungsprozess vorzustellen. Die angegebenen Zeiten sind ungefähre Angaben. Dieser Unterricht könnte in der Praxis durchaus zwei komplette Unterrichtsstunden füllen.

#### **Einführung der Situation; die SchülerInnen bitten Fragen zu finden 5 Minuten**

*Das Ziel der heutigen Stunde ist es zu sehen, ob du mithilfe der Mathematik eine Situation bearbeiten kannst. Am Anfang wirst du denken, dass die Situation nichts mit Mathematik oder Naturwissenschaft zu tun hat. Ich möchte herausfinden, ob du kreativ sein kannst und Wege findest die Dinge anzuwenden, die du in der Schule gelernt hast.*

Führen Sie die Situationen sorgfältig und anschaulich ein. Verwenden Sie dazu eine PowerPoint Präsentation, wenn möglich in Verbindung mit einem Smartboard.

*Diese Fotos sind in Honduras aufgenommen worden. Sie zeigen einige Menschen die eine Schule aus alten 1-Liter Plastikflaschen bauen. Sie füllen diese zunächst mit Sand und verwenden sie wie Ziegelsteine. Das ist ein toller Weg, um Abfallstoffe wiederzuverwenden! Welche Fragen fallen euch zu dieser Situation ein?*

Geben Sie den SchülerInnen zwei Minuten Zeit, um sich Fragestellungen zu notieren, die ihnen in den Sinn kommen. Sammeln Sie die Ideen dann an der Tafel. Beispielsweise:

*Wie viele Flaschen (oder wie viel Sand) braucht man, um eine Wand zu errichten?  
Wie viele Flaschen braucht man, um das ganze Gebäude zu bauen?  
Wie sieht das mit den Ecken aus?*

Fragen Sie die SchülerInnen, welche Fragestellungen mithilfe der Mathematik gelöst werden können. Danach soll sich jede Gruppe eine dieser Fragestellungen aussuchen, um daran zu arbeiten.

#### **Vereinfachung und Darstellung des Problems 10 Minuten**

Erklären Sie, dass es manchmal zu kompliziert ist, Situationen aus ihrem ursprünglichen Zustand heraus zu bearbeiten. Deswegen müssen sie vereinfacht werden, bevor sie mit Mathematik in Verbindung gebracht werden können. Mathematisches Denken erfordert fast immer diesen Prozess.

*Wie können wir beginnen an dem Problem zu arbeiten? Können wir an einem einfacheren Problem arbeiten? Welche Mittel könnten uns dabei helfen über das Problem nachzudenken?  
Würde uns rechteckiges Papier, isometrisches Papier, ein Maßband oder ein Lineal weiterhelfen? Welche Diagramme könnten uns weiterhelfen?*

Zeigen Sie die vorhandenen Mittel um an der Fragestellung zu arbeiten. Legen Sie diese gegebenenfalls im Klassenzimmer bereit, sodass die SchülerInnen selbst entscheiden können, ob sie diese benutzen wollen oder nicht.

...

## EMPFOHLENE LITERATURHINWEISE

*Learning mathematics through contextualised situations.*

Boaler J. (1993) 'The Role of Contexts in the Mathematics Classroom', *For the Learning of Mathematics* 13(2)

*Looking at the apprenticeship model of learning.*

Brown, J. S., Collins, A. and Duguid, P. (1989) 'Situated cognition and the Culture of Learning', *Educational Researcher*, 18 (1), pp 32-42.

*Looking at a different way to organise the Year 9 curriculum*

Carter, C. (2008) 'A different way', *Mathematics Teaching*, 207, pp 38-40

<http://www.atm.org.uk/mt/archive/mt207files/ATM-MT207-38-40-mo.pdf>

*What do pupils see as mathematical? Does it have to have numbers?*

Mendick, H., Moreau, M. and Epstein D. (2007) 'Looking for mathematics' in D. Kuchemann (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 27 (1) pp 60 – 65

<http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip27-1/BSRLM-IP-27-1-11.pdf>

*A comparison of the mathematics people use in school and out of school.*

Nunes, T., Schliemann, A.D., Carraher, D.W. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press

*What is important in mathematics education?*

Polya G (2002) 'The goals of mathematical education: part 1 and part 2' *Mathematics Teaching*, 181, pp 6-7 and 42-44

<http://www.atm.org.uk/mt/archive/mt181files/ATM-MT181-06-07.pdf>

<http://www.atm.org.uk/mt/archive/mt181files/ATM-MT181-42-44-mo.pdf>