Primas

ERGÄNZUNG ZU DEM LEITFADEN:
HANDOUTS ZU MODUL 1: FORSCHUNGSFRAGEN ENTWICKELN

Wie können SchülerInnen dazu angeregt werden ihre eigenen Fragenstellungen zu entwickeln und diese weiterzuverfolgen?

Handouts

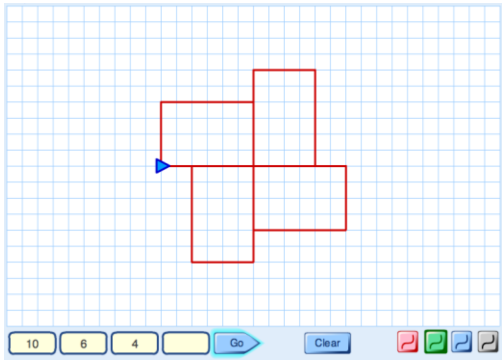
Handout Nr.

Handout Nr. 1. Zu erforschende Phänomene

Die rollenden Becher
Schaut euch diese zwei Becher an.
Stellt euch vor, dass sie über den Fußboden rollen.

- Sammelt einige Fragen, die euch dabei in den Sinn kommen.
  „Werden die Becher in eine … rollen?“
  „Wie kann ich … vorhersehen?“
  “Was würde passieren, wenn …?”
- Stellt einige Vermutungen auf. Diese können in etwa so beginnen:
  „ Wenn man diese Form des Bechers nimmt, dann passiert …“
  “ Wenn man den Becher zu stark rollt, dann …”
- Nun führt ein Experiment durch und seht, was dabei rauskommt.
  Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?

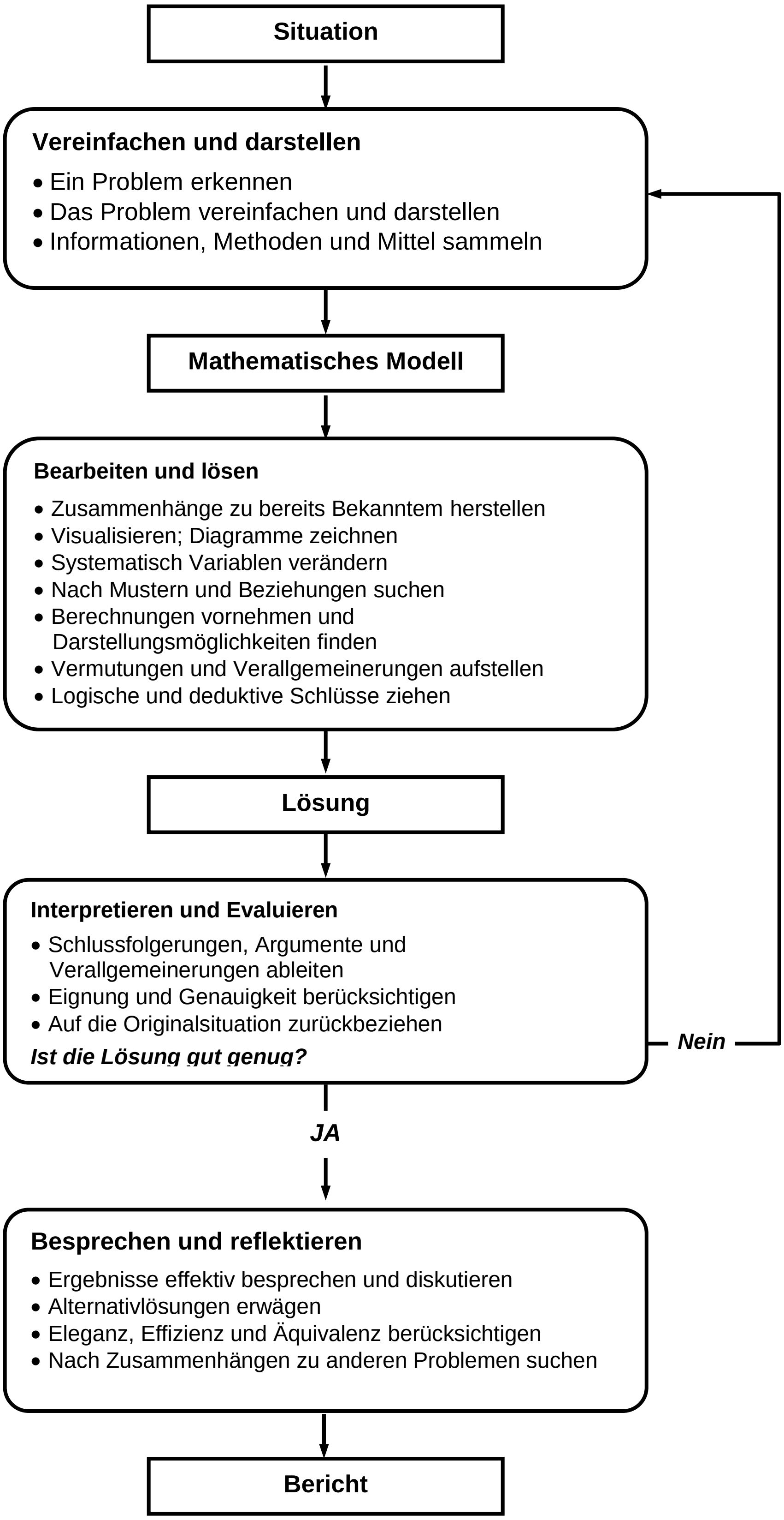
Spirolaterals?
Gebe einige Zahlen in die *Spirolaterals*-Maschine ein.
Drücke "Go" und siehe, was geschieht.



- Wie kontrollieren die Nummern das, was auf dem Bildschirm dargestellt ist?
- Sammle einige Fragen, die du klären möchtest.
  Diese können etwa so beginnen:
  "Wie können wir den PC dazu bringen … zu malen?"
  "Was wird geschehen, wenn wir ...?"
  Probiere es aus und beantworte deine eigenen Fragen!
- Stelle einige Hypothesen auf. Diese können in etwa so beginnen:
  "Wenn man drei Zahlen verwendet, dann ..."
  "Wenn man eine Zahl wiederholt, dann ..."
  "Wenn man die Reihenfolge der Zahlen ändert, dann ..."
  Kannst du deine Hypothesen *erklären* und *beweisen*?

Handout Nr. 2 Der Modellierungsprozess

Die schmalen Kästchen repräsentieren Stadien des Modellierungsprozesses.
Die breiten Kästchen beschreiben die Tätigkeiten, die sich zu den jeweiligen Stadien gehören.



Situation

Vereinfachen und darstellen

- Was ist genau das Problem? Kann ich es klar definieren?
- Was weiß ich und was brauche ich, um es herauszufinden?
- Kann ich das Problem vereinfachen?
- Welche Annahmen kann ich treffen?
- Welcher Teil aus der Mathematik könnte mir weiterhelfen?

Mathematisches Modell

Bearbeiten und lösen

- Habe ich sowas schon mal vorher gesehen?
- Gibt es da ein Diagramm, das ich zeichnen könnte?
- Was steht fest und was kann ich verändern?
- Kann ich das auf systematische Weise machen?
- Wie kann ich Darstellungsmöglichkeiten für mein Vorgehen finden?
- Kann ich Muster und Beziehungen erkennen?
- Wird dieses Muster immer funktionieren? Wie kann ich mir sicher sein?

Eine Lösung für das Problem

Interpretieren und Evaluieren

- Welche Schlussfolgerungen kann ich ziehen?
- Wie kann ich meine Arbeit überprüfen?
- Sind meine Schlussfolgerungen begründet?

Ist meine Lösung gut genug?

Nein

JA

Besprechen und reflektieren

- Wie kann ich den anderen meine Arbeit am besten zeigen?
- Wenn ich zurückblicke; gibt es einen besseren Weg, um es zu lösen?
- Wird diese Arbeit für andere Probleme von Nutzen sein?

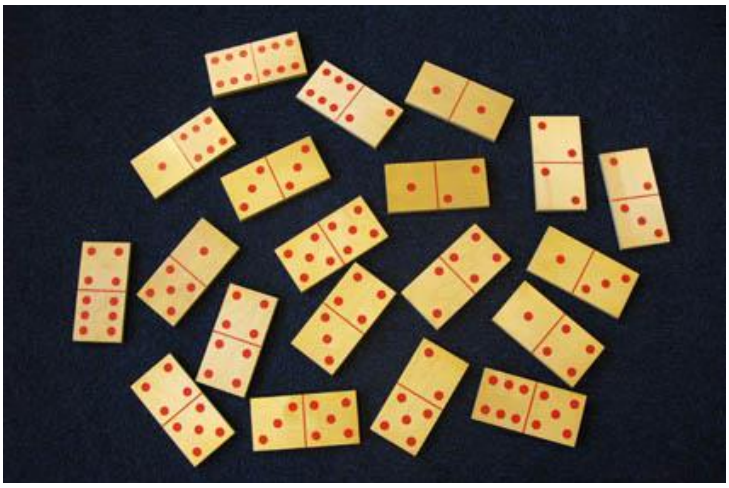
Bericht

Handout Nr. 3 Fotografien zum Erforschen

Schaue dir im Folgenden jedes Bild an und für jedes einzelne…
- erstelle eine Liste mit Dingen, die dir auffallen.
- schreibe einige Fragen auf, die dir in den Sinn kommen. Sie können zum Beispiel so beginnen:
    - Wie kann ich … beschreiben?
    - Wie viele...?
    - Was würde geschehen, wenn ich … verändern würde?

Nun wende ausgehend von den Bildern etwas Mathematik an!

Dominos



Kalender

Stapel Fässer

Ein Bürgersteig in Deutschland

Dreirad mit viereckigen Rädern

Russische Puppen

Diese Bilder wurden von Malcolm Swan aufgenommen.

Weitere Bilder, die Ausgangspunkt für mathematische Diskussionen sein können, finden Sie auf der folgenden Seite von Richard Phillips: http://www.problempictures.co.uk/

Primas

Handout Nr. 4 Eine Schule aus Flaschen bauen (in Honduras)

Schau dir die Bilder an und:

- Erstelle eine Liste mit Dingen, die dir auffallen.
- Schreibe einige mathematische Probleme auf, die dir in den Sinn kommen.
- Nun versuche ein Problem zu lösen!

Zunächst sammeln wir alte Plastikflaschen...

und füllen sie mit Sand auf.

und erstellen ein Fundament mit Steinen...

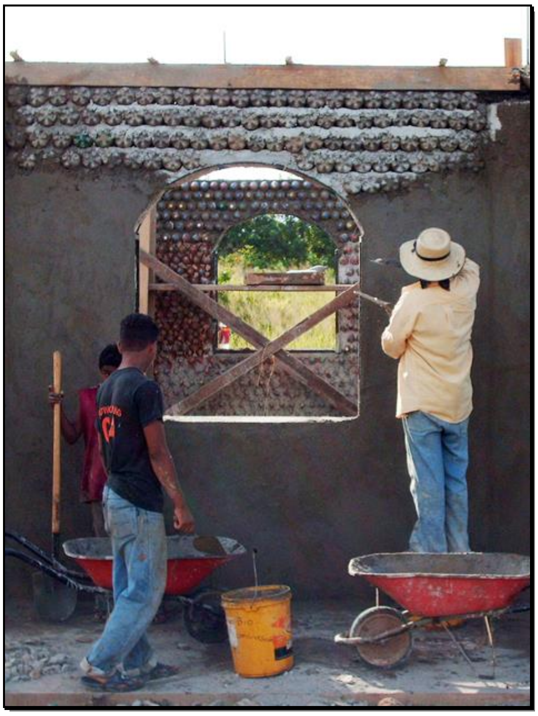
und fangen an zu bauen...

und bauen...

und bauen...

bauen Fenster ein...

und verputzen die Wände.



Das Gebäude steht in Honduras und ist jetzt ein Zentrum für ein Sekundarschulprogramm, dessen Ziel es ist, junge Leute auszubilden und zu motivieren ihren Gemeinden zu helfen und die Armut zu senken. Ein besonderer Schwerpunkt des Programms ist es, SchülerInnen bei der Entwicklung ihrer Problemlösefähigkeiten zu unterstützen.

Bilder mit freundlicher Genehmigung von:
Bayán Asociación de Desarollo Socio-Económico Indígena, La Ceiba, Honduras.

Handout Nr. 5 Eine Schule mit Flaschen bauen: Der Modellierungsprozess

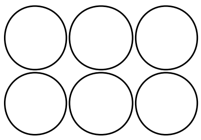
Im Folgenden erläutern wir den Modellierungsprozess; bezogen auf die Aufgabe „Eine Schule mit Flaschen bauen“.

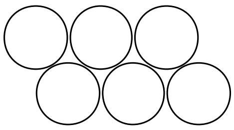
(i) Vereinfachen und darstellen

Zunächst ermitteln wir einige Problemstellungen, die als Fragen formuliert werden können:

- Wie viele Flaschen benötige ich für ein solches Gebäude?
- Wie groß ist das Gebäude, wie groß ist ein Mensch?
- Wie passen die Flaschen zusammen?
- Wie viel Sand brauchen wir, um die Flaschen zu füllen?
- Was ist mit dem Mörtel dazwischen?
- Wie funktioniert das mit den Ecken?
- Was ist mit Türen und Fenstern?
- Was ist mit dem Dach?

Wir werden uns (für den Anfang) auf einen praktischen Ansatz zur Beantwortung der folgenden Frage konzentrieren: Wie viele Flaschen benötige ich für ein solches Gebäude?
Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir zunächst einmal an, dass das Haus 4 Wände hat (wie die Winkel im Bild oben nahelegen), alle von derselben Größe, und dass es keine Fenster gibt. Wir können die Berechnungen noch zusätzlich vereinfachen, wenn wir annehmen, dass die Anzahl der Flaschen, die benötigt werden, ungefähr so viele wären, wie wenn sie im Rechteck gestapelt wären, d. h. eher so... als so...





Wir werden diese Vermutung im zweiten Durchgang durch den Modellierungskreislauf abändern.

(ii) Bearbeiten und lösen

Zähle die Flaschen, die in einer Reihe stehen.
Schätze, wie viele Reihen es gibt. (Man kann sie nicht alle sehen)
Das Produkt daraus ist ungefähr die Anzahl an Flaschen.
Addiere auf für 4 Wände – angenommen die Wände sind gleichgroß.

Also: Es sind 25 Flaschen in einer Reihe.
Wir können nur die oberen 7 Reihen deutlich erkennen und zählen; diese entsprechen in etwa 1/3 Höhe.
Also schätzen wir, dass ungefähr $3 \times 7 \approx 20$ Reihen sind.
Also besteht die Wand aus etwa $25 \times 20 = 500$ Flaschen.
Angenommen die 4 Wände sind gleichgroß, dann wären es $4 \times 500 = 2000$ Flaschen.

(iii) Interpretieren und Evaluieren

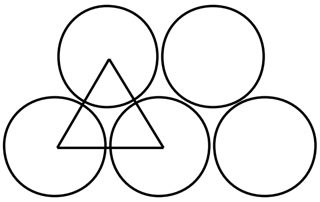
Dieses Resultat ist gut genug, um den Modellierungsprozess zu veranschaulichen (und einfach davon zu berichten) aber (und das ist der Grund, warum das ein Modellierungskreislauf ist) wenn wir das Problem wirklich verstehen wollen, **müssen wir die Lösung verbessern, indem wir einen Schritt zurückgehen und die anderen Fragen, die oben aufgelistet sind, beantworten.**
Mögliche Verfeinerungen beinhalten zum Beispiel:

- Wie groß sind diese Flaschen? (Können wir einen Menschen als Vergleich herannehmen?)
- Wie viel Sand brauchen wir?
  (Z.B. für 2000 1-Liter Flaschen brauchen wir ca. 2-3 Tonnen; warum?)
- …und selbstverständlich müssen wir einen geeigneten Plan für das Gebäude erstellen.

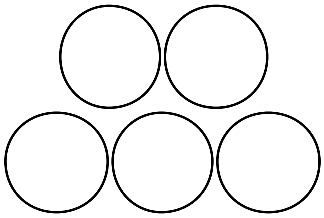
(i) Vereinfachen und darstellen

Wir könnten das Stapeln der Flaschen auch auf andere Weisen darstellen. Zum Beispiel, indem wir sie enger stapeln wie in Abbildung A (ohne Mörtel) oder Abbildung B (mit Mörtel).

Kein Mörtel:



Ein wenig Mörtel zwischen den Reihen:



(ii) Bearbeiten und lösen

Wenn es keinen Mörtel gäbe, wäre die Länge der längsten Reihe genauso groß sein wie der *Durchmesser der Flasche multipliziert mit der Anzahl der Flaschen in einer Reihe*. Die Höhe zwischen den Reihen wäre die Höhe der gleichseitigen Dreiecke in der Abbildung. Dies kann man entweder mit dem Pythagoras ausrechnen oder einfach durch die Vermessung eines Modells aus 3 Flaschen.

Höhe zwischen den Reihen = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times Durchmesser \approx 0{,}87 \times Durchmesser$

Also wäre die Einsparung der Lücken durch das enge Stapeln (im Vergleich zu dem rechteckigen Stapeln) 13%, obwohl an den Enden jeder Reihe größere Lücken sind.

Mit Mörtel scheint die Höhe der einzelnen Reihen ungefähr so groß zu sein wie der Durchmesser einer Flasche. Folglich können wir annehmen, dass eine Wand ungefähr genauso hoch wäre wie der Durchmesser der Flasche multipliziert mit der Anzahl an Reihen.

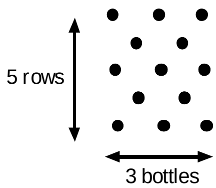
Beide Modelle verringern die Anzahl der Flaschen, die man benötigt, um 1 Flasche in jeder 2. Reihe.

Die Anzahl der Flaschen, die man für jede Wand benötigt, können in einer Tabelle gezählt und dargestellt werden:

Anzahl der Reihen der Flaschen (*r*)

6	9	15	21	27	33	39
5	8	13	18	23	28	33
4	6	10	14	18	22	26
3	5	8	11	14	17	20
2	3	5	7	9	11	13
1	2	3	4	5	6	7
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Anzahl der Flaschen in der längsten Reihe (*n*)



Wenn wir, wie zuvor, annehmen, dass in der längsten Reihe 25 Flaschen sind und es 20 Reihen gibt, dann würden bei dieser Anordnung nur 10 Flaschen weniger beziehungsweise 490 Flaschen für jede Wand benötigt.
Für 4 Wände ergibt das 1960 Flaschen – nur 2 % weniger als unsere vorherige Schätzung.

(iii) Interpretieren und evaluieren

Diese Analyse bestätigt, dass unsere vorherige Schätzung ziemlich gut gewesen ist.
Die folgende Untersuchung findet algebraisch statt, ein Ansatz, der die allgemeine Struktur des Problems aufzeigt. Dieser wird jenseits der Fähigkeiten vieler SchülerInnen sein, aber er veranschaulicht hier den Prozess der algebraischen Modellierung anhand einer einfachen Situation.

(i) Vereinfachen und darstellen

Wie viele Flaschen brauche ich, um ein rechteckiges Gebäude aus Flaschen zu errichten?

Überlege und liste die Variablen auf:

Höhe der Wand	*h*
Breite der Wand	*w*
Durchmesser einer Flasche	*d*
Anzahl in einer Reihe	*n*
Anzahl der Reihen	*r*
Anzahl an Wänden	*W*
Gesamtanzahl der Flaschen	*T*

Wir werden jede Wand von 1 bis 4 markieren.

Nun **erstellen** wir **Beziehungen** zwischen den Variablen:

$T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$	(Gesamtanzahl der Flaschen in allen 4 Wänden)
$W_1 = n \times r$ etc.	(Angenommen alle Wände sind gleich groß, also r gleich)
$r\frac{h}{d}$	(Angenommen Reihen haben den Abstand d)
$n_1 = \frac{W_1}{d}$ etc.	(Angenommen Wände haben unterschiedliche Breite)

(ii) Bearbeiten und lösen

Wir können einige neue Gleichungen erstellen, in dem wir diese kombinieren:

$$W_1 = n \times r = \frac{W_1}{d} \times \frac{h}{d} = \frac{W_1 \times h}{d^2}$$

$$T = (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) \times \frac{h}{d^2}$$

$T = P \times \frac{h}{d^2}$ (P= Gesamtumfang des Hauses)

$T = \frac{A}{d^2}$ (A= Gesamtfläche der Wände)

(iii) Interpretieren und evaluieren

Wir können die benötigte Anzahl der Flaschen aus den letzten zwei Gleichungen schätzen. Die letztere setzt nicht voraus, dass keine Türen und Fenster vorhanden sind. Sie legt einfach dar, dass jede Flasche einen Wandbereich besetzt, der so groß ist wie das Quadrat seines Durchmessers. Vielleicht hätten wir diese einfache Beziehung schon zu Beginn sehen können!

Handout Nr. 6 Ein möglicher Unterrichtsverlauf

Hier folgen einige Vorschläge, wie die Fotos im Unterricht eingesetzt werden können. Ziel ist, den SchülerInnen den Modellierungsprozess vorzustellen. Die angegebenen Zeiten sind ungefähre Angaben. Dieser Unterricht könnte in der Praxis durchaus zwei komplette Unterrichtsstunden füllen.

Einführung der Situation; die SchülerInnen bitten Fragen zu finden 5 Minuten

> *Das Ziel der heutigen Stunde ist es zu sehen, ob du mithilfe der Mathematik eine Situation bearbeiten kannst. Am Anfang wirst du denken, dass die Situation nichts mit Mathematik oder Naturwissenschaft zu tun hat. Ich möchte herausfinden, ob du kreativ sein kannst und Wege findest die Dinge anzuwenden, die du in der Schule gelernt hast.*

Führen Sie die Situationen sorgfältig und anschaulich ein. Verwenden Sie dazu eine PowerPoint Präsentation, wenn möglich in Verbindung mit einem Smartboard.

> *Diese Fotos sind in Honduras aufgenommen worden. Sie zeigen einige Menschen die eine Schule aus alten 1-Liter Plastikflaschen bauen. Sie füllen diese zunächst mit Sand und verwenden sie wie Ziegelsteine. Das ist ein toller Weg, um Abfallstoffe wiederzuverwenden! Welche Fragen fallen euch zu dieser Situation ein?*

Geben Sie den SchülerInnen zwei Minuten Zeit, um sich Fragestellungen zu notieren, die ihnen in den Sinn kommen. Sammeln Sie die Ideen dann an der Tafel. Beispielsweise:

> *Wie viele Flaschen (oder wie viel Sand) braucht man, um eine Wand zu errichten?*
> *Wie viele Flaschen braucht man, um das ganze Gebäude zu bauen?*
> *Wie sieht das mit den Ecken aus?*

Fragen Sie die SchülerInnen, welche Fragestellungen mithilfe der Mathematik gelöst werden können. Danach soll sich jede Gruppe eine dieser Fragestellungen aussuchen, um daran zu arbeiten.

Vereinfachung und Darstellung des Problems 10 Minuten

Erklären Sie, dass es manchmal zu kompliziert ist, Situationen aus ihrem ursprünglichen Zustand heraus zu bearbeiten. Deswegen müssen sie vereinfacht werden, bevor sie mit Mathematik in Verbindung gebracht werden können. Mathematisches Denken erfordert fast immer diesen Prozess.

> *Wie können wir beginnen an dem Problem zu arbeiten? Können wir an einem einfacheren Problem arbeiten? Welche Mittel könnten uns dabei helfen über das Problem nachzudenken? Würde uns rechteckiges Papier, isometrisches Papier, ein Maßband oder ein Lineal weiterhelfen? Welche Diagramme könnten uns weiterhelfen?*

Zeigen Sie die vorhandenen Mittel um an der Fragestellung zu arbeiten. Legen Sie diese gegebenenfalls im Klassenzimmer bereit, sodass die SchülerInnen selbst entscheiden können, ob sie diese benutzen wollen oder nicht.

Geben Sie den SchülerInnen 10 Minuten Zeit, um zu überlegen, wie sie an das Problem herangehen wollen.

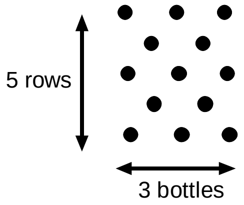
Ok jetzt gebe ich euch 10 Minuten Zeit, um zu zweit an der Aufgabe zu arbeiten. Danach werde ich einige von euch nach vorne rufen, um über die verschiedenen Ansätze, die ihr verwendet habt, zu diskutieren.

Besprechung der Schülerideen 10 Minuten

Bitte Sie die SchülerInnen ihre verwendeten Methoden und Darstellungsmöglichkeiten zu beschreiben. Zum Beispiel:

"Wir vereinfachen das Problem, indem wir uns kleinere Wände anschauen, um dann irgendwie die benötigten Flaschen zu zählen. Die schwarzen Kleckse sind die Flaschen.

Die Zeichnung zeigt, dass man 13 Flaschen braucht, wenn es 5 Flaschenreihen gibt und die längste Reihe 3 Flaschen hat."



Natürlich können die SchülerInnen verschiedenste Möglichkeiten zur Vereinfachung und Darstellung finden, von denen einige hilfreicher sind als andere. Nehmen Sie sich ein wenig Zeit, um die jeweiligen Vor- und Nachteile zu diskutieren, soweit sie klar und verständlich sind.

Analyse und Lösung des Problems 20 Minuten

Geben Sie den SchülerInnen Zeit, um zu zweit an den Fragestellungen zu arbeiten. Gehen Sie umher und bieten Sie strategische Hilfestellung an. Beispielsweise:

Lass dir Zeit, keine Eile.
Was weißt du schon darüber?
Was versuchst du herauszufinden?
Bittet nicht zu schnell um Hilfe – versucht es selbst herauszufinden.

Stellen Sie denjenigen, die Schwierigkeiten haben, passende Fragen aus dem Handout 2:

Wo hast du schon einmal etwas Ähnliches gesehen?
Es nimmt viel Zeit in Anspruch, wenn man das Diagramm jedes Mal neu zeichnet. Kannst du eine einfachere Darstellung verwenden?
Was bleibt unverändert? Was willst du verändern? Kannst du da systematisch vorgehen?
Kannst du irgendwelche Muster oder Beziehungen sehen? Kannst du sie erklären?
Wie kannst du das, was du machst, aufschreiben?
Kannst du mir erklären wie man von diesem auf diesen Schritt kommt?

Führen Sie diejenigen, die gut vorankommen, in Richtung Interpretation und Evaluation:

Was hast du bisher herausgefunden?
Überzeuge mich davon, dass deine Lösung gut ist.

Wie genau ist deine Antwort? Ist es genau genug?
Kannst du einen anderen Weg finden, der andere Möglichkeiten aufzeigt, das Problem zu betrachten?

SchülerInnen besprechen und reflektieren ihre verschiedenen Ansätze. 10 Minuten

Rufen Sie einige Gruppen nach vorne, wenn die Mehrheit der SchülerInnen einen guten Fortschritt mit ihrer Lösung gemacht hat, um ihre Ideen den anderen vorzustellen. Es ist nicht schlimm, wenn einige noch keine Schlussfolgerungen gezogen haben. Sie können trotzdem ihre Ansätze und Ideen mit den anderen teilen.

Machen wir jetzt einen Schnitt, und ihr tragt einige der verschiedenen Herangehensweisen, die ihr angewendet habt, vor und überlegen dann, welche Mathematik hilfreich oder nicht so hilfreich für die einzelnen Ansätze gewesen ist. Da nicht alle fertig geworden sind, möchte ich nicht eure Antworten wissen, sondern eure Gedankengänge.

Erzählt uns von:

- *der Fragestellung, mit der ihr euch beschäftigt habt;*
- *wie ihr das Problem durch ein mathematisches Modell repräsentiert habt;*
- *wie ihr in eurem Modell gearbeitet habt, um Lösungen zu erhalten;*
- *allen Schlussfolgerungen, zu denen ihr bislang gekommen seid. Machen eure Lösungen Sinn?*

Wir haben uns dazu entschieden herauszufinden, wie viele Flaschen man benötigt, um das Gebäude zu errichten. Wir haben die Flaschen in einer Reihe gezählt, dann die Anzahl der Reihen – aber das konnte man nicht so gut erkennen. Dann haben wir diese Zahlen miteinander multipliziert. Dann haben wir gesagt, dass es 4 Wände gibt, hoffentlich in derselben Größe. Danach begannen wir uns Gedanken über die Türen und Fenster zu machen….

Wenn die SchülerInnen ihre Ideen vorstellen, bitten Sie die anderen SchülerInnen Vor- und Nachteile für jeden der Ansätze zu nennen. Wenn eine Erklärung vernünftig klingt, aber schlecht ausgedrückt wurde, reagieren Sie beispielsweise so:

Kannst du das bitte wiederholen?
Du scheinst eine gute Idee zu haben aber ich möchte, dass du diese so klar wie möglich erklärst.
Klare Kommunikation ist wichtig in der Mathematik.

Besprechung der Prozesse der SchülerInnen 5 Minuten

Stellen Sie den SchülerInnen eine vereinfachte Version des Modellierungsprozesses vor und besprechen Sie den Prozess, den sie selbst durchlaufen haben. Versuchen Sie den SchülerInnen den Wert der Modellierung ein wenig bewusster zu machen.

Die Anwendung der Mathematik und der Naturwissenschaft erfordert all diese Prozesse. Es geht nicht nur darum einfache Techniken zu lernen wie zum Beispiel die Addition von Bruchzahlen! Es geht auch darum Alltagssituationen zu betrachten, diese zu vereinfachen und zu analysieren, um sie besser zu verstehen.
So sieht die Arbeit professioneller Mathematiker und Naturwissenschaftler aus.