

Problem des Quartals

– Mathe Edition –

Satz von Pick

Karte von Kroatien im Hintergrund: [Lizenz CC 3.0 / GNU Free Documentation License](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Croatia_location_map.svg), Autor NordNordWest, veröffentlicht auf Wikipedia (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Croatia_location_map.svg). Das Gitter wurde von den Autoren dieser Aufgabe hinzugefügt, und das angepasste Bild wird ebenfalls unter der CC 3.0-Lizenz veröffentlicht.



Die Bestimmung der Fläche unregelmäßiger Formen wie Länder und Regionen kann kompliziert sein. Ein 1899 vom österreichischen Mathematiker Georg Alexander Pick (1859–1942) entdeckter Satz kann jedoch dabei helfen, einfache und gute Näherungswerte zu erhalten!

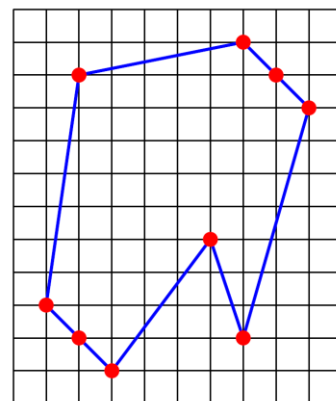
Um den Satz von Pick anzuwenden, benötigt man ein quadratisches Gitter. Die Fläche des kleinsten Quadrats im Gitter wird als quadratische Einheit bezeichnet. Die Menge der Schnittpunkte der Linien, die das Gitter bilden, wird als (quadratisches) Gitter bezeichnet. Der Satz von Pick ist auf jede polygonale Form anwendbar, deren Eckpunkte alle Gitterpunkte sind – ein Gitterpolygon.

Satz von Pick: Bei einem gegebenen Gitterpolygon sei I die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb des Polygons und B die Anzahl der Gitterpunkte an seiner Grenze. Dann beträgt die Fläche A des Polygons $I + B/2 - 1$ Quadrat-Einheiten.

Beispiel 1. Angenommen, das Gitter besteht aus Einheitsquadraten (Seitenlänge gleich 1), dann beträgt die Fläche des blauen Gitterpolygons in der Abbildung rechts $47 + 9/2 - 1 = 50,5$, da sich 9 Gitterpunkte auf der Grenze des Polygons (rot markiert) und 47 Gitterpunkte innerhalb des Polygons befinden.

Beispiel 2. Das Bild oben auf dieser Seite zeigt die Karte von Kroatien, überlagert mit einem quadratischen Gitter. Die quadratische Einheit beträgt 2500 km^2 . Die Form Kroatiens wird durch ein Gitterpolygon (rot) angenähert. Es gibt 20 Gitterpunkte an seiner Grenze und 12 Gitterpunkte im Inneren, sodass seine Fläche nach der Pick-Formel 21 Quadrat-Einheiten beträgt, d. h. 52500 km^2 . Beachte, dass wir selbst dann, wenn das Gitterpolygon keine allzu gute Annäherung an die Form Kroatiens war, eine vernünftige Annäherung an die tatsächliche Fläche (56594 km^2) erhalten haben.

Wie verändert sich die Fläche des blauen Polygons unten, wenn die Seitenlänge der Quadrate, aus denen das Gitter besteht, auf 1 cm, 5 m oder 10 km geändert wird?



Wähle eine Karte eines Landes oder einer Region aus und berechne deren Fläche!

Zeichne ein quadratisches Gitter über die ausgewählte Karte und notiere, welche Länge den Seiten der Quadrate entspricht. Zeichne die Grenzen des Landes durch ein Gitterpolygon ein und berechne mit Hilfe des Satzes von Pick eine Annäherung für die durch die Karte dargestellte Fläche. Wiederhole dies mit mindestens zwei verschiedenen quadratischen Gittern mit jeweils zwei verschiedenen Gitterpolygon-Annäherungen und vergleiche die Ergebnisse mit der tatsächlichen Fläche!